書評

部分の総和は全体に一致しない？

豊間根 則道
主席研究員
（株）国際開発センター

長沼伸一郎著、『物理数学の直感的方法＜普及版＞』、講談社ブルーバックス、2011 年

工学部の学生でありながら教養課程の数学の点数はほぼ０点に等しかった私にこの本の評を書く資格があるとは思わないが、紹介をするぐらいのことは許されるだろう。　この稀有な本は二つの意味で紹介に値する。一つは、大学の数学で学ぶいくつかの基本概念を目に見えるイメージとして理解させてくれるからである。副題に『理工系で学ぶ数学「難所突破」の特効薬』とあるのはあながち誇張ではない。第 1 章から第 10 章までに取り上げられたテーマは例えばテイラー展開、フーリエ級数・フーリエ転換、複素関数・複素積分などなどであるが、どの章も一読して、これはこういうことだったのか！と得心がいく。いや、私が理解できたとは言わない。これなら丁寧に取り組めば私でも理解できそうだという予感と希望を持たせてくれると言う方が正確である。ともあれ、この著者には極めて抽象的な概念や複雑な数式の意味するところが具体的なイメージとして見えてくるらしい。そのような力は並の数学者にはないはずで、この著者の才能も一つの天才なのだろうなぁと思わされる。（実際、この本の末尾にある西成活裕東大教授の「解説」は、「直感の天才、理系を救う」と題されている。当たっている。）

その天賦の才を最もいかんなく示していると思うのが、第 5 章「ベクトルの rot と電磁気学」である。ベクトル解析では「ローテーション」という概念が出てくるのだそうであるが、これが分かりにくいもので、その意味が理解できなくて挫折する学生が多いのだという。ちょっと長くなるが、著者がこの本を書くことになったきっかけが説明されているので、引用する。

「実はかく言う私も学部の間は、ローテーションの意味については、教科書に載っているストークスの定理による解釈で我慢しており、もっと単純で基本的な意味に気づいたのは、ようやく大学院の一年か二年ごろである。学部二年かそこらの内容の意味がつかめるのが大学院生になってからというのは、いかにも遅い。私はそう思ったが、このことを私のグループで非常に優秀だった友人に白状したのである、実はローテーションの意味というのが今ごろようやくわかったよ、と。そう言ったところ、彼は私の袖を引っぱって言うのである。ちょっちょっちょっと、ローテーションって本当は一体どういう意味なの？

そして何人かの友人に当たってみた結果、おぼろげにわかったのは次のようなことである。まず第一に驚いたのは、相当優秀な人でも明確なイメージを描いていた人はいなかったということである。第二に、誰もが、理解していないのは自分だけであって、周囲は皆これ

を理解しているに違いないと思いこんでいるらしいこと、そして第三に、目についた限りのベクトル解析の教科書は、いずれもこれに関してエレガントではあるがイメージの描きにくい説明方法をとっており、もし意味を書いてある本が存在していたとしても、学生がそういう本を掘り出すのは容易ではないことである」(66~67 ページ)。著者にこの本を書かせるきっかけがこの「発見」にあったのだという。

で、このローテーション（rot）なる概念は数式が複雑なのでここに書き写すことはしないが、著者はその意味を「ベクトル場を水流と考えたとき、その流れの中にある微小な水車の回転速度と理解できるのである」と説明する。その後に続く新書でわずか 3 ページの解説を読めば、その数式の意味するところが何もかも明解になるのである。この微小な水車という比喩と四つの的確な図に助けられて、私でさえも分かった気になるのがすごい。これぞ天才のなせる業である。

それだけでも十分にこの本は読むに値するのだが、実はさらにもう一つの価値があり、それがあるゆえにこの本を皆様に紹介したいのである。その価値とは最後についている「やや長めの後記―直観化はなぜ必要か」という一文である。この文はいくつかの社会哲学的な大問題や人類における物理学史・数学史の流れを俯瞰する趣があり、脳味噌がくらくらする思いがするほどのものである。え、物理数学の本がなんで哲学問題に触れるのと思われるに違いないが、そこがこの著者の独壇場と言ってよく、このような切り口で社会哲学上の問題を切ってみせた本を私は寡聞にして知らない。

この後記は、物理学でいう三体問題が解けない不思議議から始まる。二体問題ならば問題は完全に解けて、例えば太陽と地球の運行はきれいな関数で表現され、いかなる時間の位置も完璧に知ることができる。しかし、月を加えて三体になったとたんに問題は解けなくなる。三体の位置関係を示す関数が見つからないのである。そして話はそこから一気に三体問題以上に複雑（であるはず）な人間社会を「解く」、つまりその関数関係を見いだす試みへ跳ぶ。

人間社会を一つの関数で表すことができれば、二体問題と同じく、各要素の位置（状態）はいかなる時点についても定まることになる。そんなことができるのだろうか。無論そんな関数を実際に「求める」ことはできるわけがない。しかし、概念として、思考実験としてならばいくらでもできる。そこで著者が援用するのは行列である。話を簡単にするために、著者は人間社会をいくつかの職業集団から成るものとする。つまり「社会全体の営みをもっぱら多数の職業集団同士の相互作用という観点から捉え、全体の動きをそれら多数の職業集団の動きに置き換えて表現してしまおうというわけである」(235 ページ)。

職業集団の今日の状態を列ベクトルにまとめる。それに対して職業集団の間の相互作用を表す量を何らかの形で１個の行列に表現したものを用意し、この行列を左から一回だけ列ベクトルにかけると、翌日の各職業集団の状態がやはり列ベクトルの形で表示されるようにする。そうして得られた列ベクトル（翌日の状態）に同じ操作をもう一回繰り返してや

ると、今度は明後日の状態が示されることになる。つまり、この特殊な行列を N 回かければ N 日後の状態が表示されることになり、社会全体の動きをいくらでも追っていけることになる。　この特殊な行列のことを著者は「作用マトリックス」と名付けている。それを A と表すと、結局、職業集団を要素とする人間社会は次の関数関係で示されることになる。

$$(x(t)) = [A]^N (x_0)$$

ここで $x(t)$ は時間 t 後（すなわち N 日後）の職業集団の状態、x_0 は今日の職業集団の状態を表す。このような仕掛けをした上で著者は、線形代数の基本法則を駆使して次のような結論に我々を導く――「部分の総和は全体に一致しない。」

デカルト以来（と著者は言う）、近代人は物事を扱う際の最良の方法は、それを扱い易いようにいくつかの部分（専門分野など）に分け、それらを別々に調べて最後にそれらをつなぎ合わせて統合する手法だと信じてきた。これは上の「作用マトリックス」に即して言えば、その行列をいくつかの小行列に分割し、個々の小行列を別々に扱うことを意味する。ところが、一般には行列を小行列に分割して別々に N 乗し、後でつなぎ合わせて統合しても、その結果はもとの大きな行列を N 乗した場合とは全く違ってしまう。それが一致する例外的な場合とは、小行列同士の相互作用成分が全部ゼロである場合だけなのである。しかし、現実の人間社会においては要素間の相互作用がゼロという場合こそがあり得ない。部分に分けて N 乗し統合しても（部分の総和）、本来の行列を N 乗した「全体」とは一致しないのである。よって、デカルト以来の還元主義的方法論には限界のあることが示される。

さらにそこから著者は三体問題に取って返し、この「作用マトリックス」の考え方を使って、なぜそれが解けないのかの理由も解き明かしてくれる。それは、一言で言えば、3 x 3 行列の対角化が（ほぼ）不可能だからなのだそうだ。詳しくは是非この書を手に取って一読してみて欲しい。新書にしては高めの値段（1040 円）だが、それだけの価値はある。お薦めしたい。